Numerička analiza 1A - Januar2 2021. 09.02.2021.

1. Za proizvoljno $x^{(0)}$, Gaus-Zajdelova metoda unapred (sa časa) za rešavanje sistema linearnih jednačina $Ax = b$ definisana je iterativnom formulom:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k+1)}), \quad i = 1, 2, ..., n, \ k = 0, 1, 2, ... \qquad (*)$$

Gaus-Zajdelova metoda unazad definisana je iterativnom formulom:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k)}), \quad i = n, n-1, ..., 1, \ k = 0, 1, 2, ... \qquad (**)$$

Napisati M-fajl `zad1.m` sa funkcijom `[iter1,iter2] = zad1(A, b, X0, tol)` koja proverava da li će obe varijante $(*)$ i $(**)$ Gaus-Zajdelove metode konvergirati za rešavanje sistema `A`x =`b` i ako konvergiraju određuje ukupan broj iteracija `iter1` potrebnih metodi $(*)$ i ukupan broj iteracija `iter2` metodi $(**)$ za nalaženje približnog rešenja sistema linearnih jednačina sa tačnošću `tol` počevši od početne aproksimacije rešenja `X0`. Tražena tačnost je postignuta kada je $||\mathtt{A}x^{(k)} - \mathtt{b}||_\infty < \mathtt{tol}$.
Napomena: Zadatak će se najjednostavnije rešiti ukoliko se i za metodu $(**)$ matrica A izrazi preko matrica L, D i U, i na osnovu njih formira iterativna formula $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ kao što je rađeno za (direktnu) Gaus-Zajdelovu metodu.

2. Matrica Z se zove pseudo-inverz matrice A ako su zadovoljeni sledeći uslovi: $ZA = (ZA)^T$, $AZ = (AZ)^T$, $ZAZ = Z$, $AZA = A$. Može se pokazati da ako je $A = QR$ onda se pseudo-inverz za matricu A određuje kao $Z = R^{-1}Q^T$.
Napisati M-fajl `zad2.m` sa funkcijom `Z = zad2(A)` koja za prosleđenu matricu `A` određuje i kao rezultat vraća njen pseudo-inverz `Z`. QR dekompoziciju odrediti korišćenjem isključivo Householderovih transformacija. Nije dozvoljeno korišćenje ugrađenih funkcija za QR.

3. Kompresija podataka u računaru se, između ostalog, postiže i nalaženjem sopstvenih vrednosti i odgovarajućih sopstvenih vektora tzv. *matrice kovarijansi* $\Sigma = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{n}(X_k - M)^T(X_k - M)$, gde je $\{X_k\}_{k=1,...,n}$ skup od n vektora tzv. *uzoraka*, svaki dužine m, i $M = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$ je vektor *uzoračke sredine*.
Napisati M-fajl `zad3.m` sa funkcijom `[alfa,x]=zad3(A,tol)` koja metodom tragova, sa tačnošću `tol`, nalazi i vraća najveću po modulu sopstvenu vrednost `alfa` i odgovarajući normiran sopstveni vektor `x` matrice Σ, gde su vektori uzoraka $\{X_k\}_{k=1,...,n}$ dati redom kao vrste ulazne matrice `A`.

```
TEST PRIMERI:
>> A1=diag(10:19)+tril(-1*ones(10),-1)+triu(-2*ones(10),1)
>> [i1,i2]=zad1(A1,ones(10,1),eye(10,1),1e-3)
i1 =  56
i2 =  44

>> A2=[7 6 9;4 5 -4;-7 -3 8]
>> [i1,i2]=zad1(A2,ones(3,1),eye(3,1),1e-3)
Error using zad1 (line ...)
Ne konvergira Gaus-Zajdel unazad

>> A3=[2 1 1;-1 2 1;-1 -1 2]
>> [i1,i2]=zad1(A3,ones(3,1),eye(3,1),1e-3)
Error using zad1 (line ...)
Ne konvergira Gaus-Zajdel unapred

>> A4=[2 3 11 5;1 1 5 2;2 1 3 2;1 1 3 4]
>> Z=zad2(A4)
Z =
   -0.2857    0.2857    0.7143   -0.1429
    1.2857   -2.7857    0.2857   -0.3571
   -0.1429    0.6429   -0.1429   -0.0714
   -0.1429    0.1429   -0.1429    0.4286

>> [alfa,x]=zad3([1 2 3;1.3 2.3 2.8;0.9 2.2 3.1],1e-3)
alfa =
0.0504

x =
0.7484
0.3862
-0.5392

>> [alfa,x]=zad3([-1 -2;0 3;-1 7],1e-3)
alfa =
20.3347

x =
0.0083
1.0000
```